

Mensch ärgere dich nicht

– Lösungshinweis –

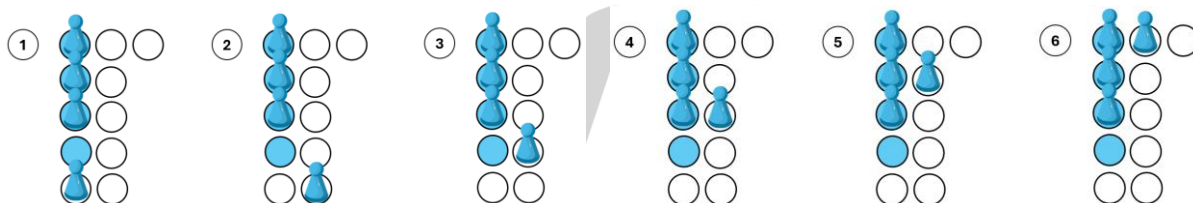
In Anlehnung an: Fundamente der Mathematik, Vertiefungskurs, S. 79/2

Die Spielsituation:

Alina spielt gegen ihren kleinen Halbbruder „Mensch ärgere dich nicht“. Sie hat bereits drei Figuren auf den Zielfeldern und muss, um das Spiel zu gewinnen, nur noch ihre letzte Figur auf das letzte verbleibende Zielfeld bekommen. Die Spielfigur wird exakt um die gewürfelte Augenzahl nach vorne bewegt. Ist dies nicht möglich, so verbleibt die Spielfigur auf ihrem Platz und bewegt sich nicht weiter.



Welche der folgenden Ausgangspositionen der letzten Spielfigur ist die beste, um nach zwei Spielrunden alle Figuren im Ziel zu haben?

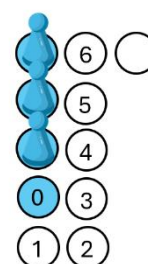


Aufgabe 1: Geben Sie eine Vermutung ab, welche der oben angegebenen Positionen die günstigste ist. Begründen Sie Ihre Vermutung.

Antwort individuell

Aufgabe 2: Geben Sie die möglichen Zustände der letzten Spielfigur in den oben beschriebenen Spielsituationen an.

Die letzte Spielfigur kann auf sechs verschiedenen Feldern vor dem Ziel stehen, sodass sechs verschiedene Zustände möglich sind. Sie können mit den Zahlen 1 bis 6 beschrieben werden. Zusätzlich kann die Spielfigur im Ziel stehen. Diesen Zustand bezeichnen wir mit 0.



Aufgabe 3: Erstellen Sie eine Übergangsmatrix für einen Spielzug in der beschriebenen Spielsituation.

Die Übergangsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, von Zustand 2 (zwei Felder vom Ziel entfernt) in Zustand 1 (ein Feld vom Ziel entfernt), in der dritten Spalte und der zweiten Zeile (Eintrag a_{23}) dargestellt. Sie beträgt $\frac{1}{6}$, da die Wahrscheinlichkeit, eine 1 zu würfeln, $\frac{1}{6}$ beträgt.

Aufgabe 4: Wie können die oben dargestellten, sechs unterschiedlichen Startpositionen mathematisch beschrieben werden?

Die unterschiedlichen Startpositionen können durch verschiedene Zustandsvektoren beschrieben werden.

Die Spielsituation 1 kann beispielsweise durch den folgenden Startvektor beschrieben werden:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten, nach zwei Spielrunden mit allen vier Spielfiguren im Haus zu sein für die sechs unterschiedlichen Startpositionen.

A^2 gibt die Übergangswahrscheinlichkeiten nach zwei Spielrunden an. Wir berechnen $A^2 \cdot x_n$, wobei x_n die unterschiedlichen Startvektoren sind. Der erste (!) Eintrag jedes Ergebnisses gibt die Wahrscheinlichkeit an, nach zwei Spielrunden mit der Spielfigur im Haus zu sein.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{36} & \frac{11}{36} & \frac{11}{36} & \frac{11}{36} & \frac{11}{36} & \frac{11}{36} \\ 0 & \frac{25}{36} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{7}{36} & \frac{7}{36} & \frac{7}{36} & \frac{7}{36} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man A^2 mit x_n , so erhält man für alle gesuchten Wahrscheinlichkeiten $\frac{11}{36}$.

Aufgabe 6: Welche Startposition ist die beste, um nach zwei Spielrunden alle vier Figuren im Ziel zu haben? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Die Wahrscheinlichkeiten sind für alle Startpositionen gleich, nämlich jeweils $\frac{11}{36}$. Somit beeinflusst die Startposition nicht die Wahrscheinlichkeit, die letzte Figur ins Ziel zu bringen und alle Startpositionen sind gleich gut.

Aufgabe 7: Was könnten mögliche Gründe für diese Auffälligkeit sein?

Da die exakte Augenzahl gewürfelt werden muss, um auf die Zielposition zu ziehen und alle Augenzahlen gleich wahrscheinlich sind, ist die Wahrscheinlichkeit für alle Startpositionen gleich groß.



Wie verändert sich das Ergebnis, wenn nicht die exakte Augenzahl für das Erreichen der Zielposition gewürfelt werden muss, sondern nur mindestens die noch benötigte Augenzahl?

Die veränderte Spielsituation bewirkt, dass andere Wahrscheinlichkeiten in der Übergangsmatrix auftreten. Die neue Übergangsmatrix lautet dann:

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ergeben sich bei der Berechnung unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten für das Erreichen der Zielpositionen je nach Startposition. Die Rechnung $A_{neu}^2 \cdot x_n$ zeigt, dass die

Spielsituationen 1 und 2 am günstigsten sind, weil man dort mit Sicherheit (d.h., mit Wahrscheinlichkeit 1) nach den zwei Spielrunden mit allen Figuren im Ziel ist.

$$A_{neu}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{35}{36} & \frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{13}{18} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DIDAKTIK DER MATHEMATIK

Universität Würzburg

DIDAKTIK DER MATHEMATIK

Universität Würzburg